**2**.**ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ**

**Цель работы**

Ознакомиться с квадратурными формулами Ньютона-Котеса численного интегрирования, исследовать влияние порядка точности квадратурной формулы и шага интегрирования на точность вычисления определенного интеграла.

**Постановка задачи**

Вычислить определенный интеграл

, , 

от функции , заданной на  с шагом посредством квадратурных формул Ньютона-Котеса порядка точности  (при имеет место формула левых прямоугольников).

При вычислении погрешностей интегрирования  за точное значение интеграла  принимается результат интегрирования, полученный с минимальным шагом и максимальным порядком.

**Порядок выполнения работы**

1. Ознакомиться с описанием работы. Уяснить цель и смысл задачи согласно

варианту (табл. 2.1). Открыть файл «Интегрирование».

Таблица2.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № |  | № |  |
| 1 |  | 11 |  |
| 2 |  | 12 |  |
| 3 |  | 13 |  |
| 4 |  | 14 |  |
| 5 |  | 15 |  |
| 6 |  | 16 |  |
| 7 |  | 17 |  |
| 8 |  | 18 |  |
| 9 |  | 19 |  |
| 10 |  | 20 |  |

2. Вычислить значения интеграла от функции по квадратурным формулам порядка точности  и  с шагом . Сравнить результаты.

3. Вычислить значения интеграла от функции  с шагом  и  по квадратурной формуле порядка точности . Сравнить результаты.

4. Проанализировать влияние порядка точности квадратурной формулы и шага

интегрирования на полученные результаты.

5. Получить зависимости ,  для всех ,  и ,  для всех , .

**Содержание отчета**

1. Цель работы.

2. Постановка задачи.

3. Квадратурные формулы (обобщенные) для .

4. Результаты вычислений (значения интегралов, полученные в п.2 и п.3).

5. График подынтегральной функции , а также таблицы и графики по-

грешностей  (для всех = const),  (для всех  = const).

6. Выводы.

**Краткие теоретические сведения**

В основе численного интегрирования лежит приближенное вычисление площади под кривой, описываемой подынтегральной функцией.

В простейшем случае, если требуется вычислить

,

площадь, ограниченную функцией , можно представить в виде площади прямоугольника со сторонами  и  (один из вариантов: − левых,  − средних, − правых прямоугольников). Тогда

.

В данном случае, можно сказать, что подынтегральная функция заменяется интерполяционным полиномом Лагранжа степени . Возникающая при этом погрешность может быть оценена как остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа , 

.

В целях повышения точности интегрирования отрезок можно разбить на  равных частей с шагом , вычислить площади элементарных прямоугольников, построенных на как на одной из сторон, и просуммировать их. В этом случае получаем обобщенную формулу прямоугольников

 , ,

погрешность которой может быть оценена в виде

.

В общем случае представляя подынтегральную функцию в виде интерполяционного полинома Лагранжа

,



и заменяя им подынтегральную функцию, после несложных преобразований получим *квадратурные формулы Ньютона-Котеса n-го порядка точности*

,

где



называются *коэффициентами Котеса*.

Полагая , получим формулу трапеций

.

При  имеем формулу парабол (число точек *N* на нечетное)



.

Для рассматриваемых в лабораторной работе порядков *n* коэффициенты  и погрешности  квадратурных фомул Ньютона-Котеса имеют следующие значения:











где .

Таким образом, погрешность численного интегрирования определяется двумя факторами – порядком точности квадратурной формулы Ньютона-Котеса и шагом интегрирования. Порядок точности задается степенью интерполяционного полинома Лагранжа, а шаг интегрирования можно выбрать по правилу Рунге, если погрешность вычисления интеграла не должна превышать задаваемой .

Согласно правилу Рунге интеграл вычисляется дважды, с шагом и . При этом для обобщенных квадратурных формул любого порядка точности погрешность может быть представлена в виде

, (3.22)

где  и  - значения интегралов, вычисленные с шагом и  соответственно, а коэффициент для формул прямоугольников и трапеций и  для формулы парабол. Далее проверяется соотношение и если это так, то выбирается шаг , а если нет, то  определяется для  и и т.д. до тех пор пока не выполнится требуемое соотношение.

**Контрольные вопросы**

1. Суть численного интегрирования посредством квадратурных формул

Ньютона-Котеса.

2. Обобщенная квадратурная формула прямоугольников.

3. Обобщенная квадратурная формула трапеций.

4. Обобщенная квадратурная формула парабол.

5. Правило Рунге выбора шага интегрирования.